

SAMPLE QUESTION : MATHEMATICS

Answer all questions. No extra sheets of paper would be supplied.

Group A

Each question below is followed by four possible answers of which exactly one is correct. Write [a] or [b] or [c] or [d] as your answer against the corresponding question number. Use only the first page of your answer book for this purpose. Each correct answer would be awarded 3 marks; 1 mark would be awarded for no attempt, and a wrong answer would fetch no credit.

প্রতিটি প্রশ্নের চারটি উত্তর দেওয়া আছে যার মধ্যে কেবলমাত্র একটি উত্তর সঠিক। প্রশ্নসংখ্যার পাশে [a] অথবা [b] অথবা [c] অথবা [d] সেই প্রশ্নের উত্তর হিসাবে লেখ। উত্তরপুস্তিকার কেবলমাত্র প্রথম পাতাটিই এই কাজে ব্যবহার কর। সঠিক উত্তরের জন্য 3 নম্বর, উত্তর না দেওয়ার জন্য 1 নম্বর, ভুল উত্তরের জন্য কোন নম্বর নেই।

1. The number of elements belonging to the three sets A, B, C are m, n, p respectively. The total number of elements belonging to exactly two sets is k ; and the number of elements common to all three is r . Then the total number of elements belonging to at least one of the three sets is

A, B, C তিনটি সেটে যথাক্রমে m, n এবং p টি উপাদান আছে। কেবলমাত্র দুটি সেটের সাধারণ উপাদানের মোট সংখ্যা k , তিনটি সেটেই আছে এমন উপাদানের সংখ্যা r , অতঃপর একটি সেটে আছে এমন উপাদানের সংখ্যা হল

- [a] $m + n + p - k - 2r$ [b] $m + n + p - 3k + r$ [c] $m + n + p - k + 3r$ [d] $m + n + p - 3k - r$.

2. If for given real numbers x and y , it is given that $\sin x = \sin(x + y) (\neq 0)$, then which of the following is always false for any choice of x and y ?

প্রদত্ত বাস্তব সংখ্যা x, y এর জন্য দেওয়া আছে $\sin x = \sin(x + y) (\neq 0)$, তবে নীচের কোনটি সকল x, y এর জন্যই অসত্য?

- [a] $\sin y = 0$ [b] $\cos y = 1$ [c] $\sin y = \sin 2x$ [d] none of these.

3. If A is a skew-symmetric matrix of order 3, and P is a 3×1 matrix, then $P^T A P$ will be

A একটি 3 ক্রমের বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং P একটি 3×1 ম্যাট্রিক্স হলে $P^T A P$

- [a] null matrix [b] a non-null symmetric matrix [c] a non-null skew-symmetric matrix [d] none of these.

4. If $\int_0^x f(t)dt = x + \int_x^1 t f(t)dt$, then $f(1)$ is equal to যদি $\int_0^x f(t)dt = x + \int_x^1 t f(t)dt$ হয়, তবে $f(1)$ এর মান

- [a] 0 [b] 1 [c] 2 [d] none of these.

5. $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ are any two functions, where \mathbb{R} is the set of reals. Then the domain of $\frac{f}{g}$ will always be

$f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ দুটি অপেক্ষক, যেখানে \mathbb{R} বাস্তব সংখ্যার সেট। তাহলে $\frac{f}{g}$ -এর অঙ্কল সর্বদা হবে

- [a] a proper subset of $D_1 \cup D_2$ [b] a proper subset of $D_1 \cap D_2$ [c] a subset of $D_1 \cap D_2$ [d] one of $D_1, D_2, D_1 \cap D_2$ and $D_1 \cup D_2$.

6. If x, y and k are positive numbers such that $\frac{10x}{x+y} + \frac{20y}{x+y} = k$ and if $x < y$, then a possible value of k can be

যদি x, y এবং k এরূপ ধনাত্মক সংখ্যা হয় যে $\frac{10x}{x+y} + \frac{20y}{x+y} = k$, এবং যদি $x < y$ হয়, তবে k -এর একটি সম্ভাব্য মান হতে পারে

- [a] 10 [b] 12 [c] 15 [d] 18.

7. The number of solutions of the equation $|x + 2| + |x + 3| + |x - 4| = 6$ is

$(|x + 2| + |x + 3| + |x - 4| = 6)$ সমীকরণটির সমাধানের সংখ্যা

- [a] exactly one (একটিমাত্র) [b] more than one but finitely many (একাধিক কিন্তু সসীম) [c] infinitely many (অসংখ্য) [d] zero (শূন্য)

8. If $\log_{30} 3 = a$ and $\log_{30} 5 = b$, then the value of $\log_{30} 8$ is $(\log_{30} 3 = a$ এবং $\log_{30} 5 = b$ হলে, $\log_{30} 8$ এর মান)

- [a] $3(a + b - 1)$ [b] $3(a + b - 3)$ [c] $3(a - b - 1)$ [d] $3(1 - a - b)$.

9. The centre of a circle of radius r is at O , C is a point at a distance $a(> r)$ from O . The tangents from C to the circle touch it at A and B . The area of triangle ABC is
(r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের কেন্দ্র O , C বিন্দুটি O থেকে $a(> r)$ দূরত্বে আছে। C থেকে এই বৃত্তের স্পর্শকগুলি A ও B বিন্দুতে বৃত্তটিকে স্পর্শ করে। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হল)
- [a] $\sqrt{a^2 - r^2} \cdot \frac{r^3}{a^2}$ [b] $(a^2 - r^2) \cdot \frac{r^2}{a^2}$ [c] $(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{r}{a^2}$ [d] none of these.
10. The term independent of x in the expansion of $(x + \frac{1}{x})^7(x + \frac{1}{x^2})^5$ is $((x + \frac{1}{x})^7(x + \frac{1}{x^2})^5$ -এর বিস্তৃতির x -বর্জিত পদটি হল)
- [a] 234 [b] 362 [c] 482 [d] 536
11. If $x[x] = 39$ and $y[y] = 68$, the value of $[x] + [y]$ is (যদি $x[x] = 39$ এবং $y[y] = 68$ হয় তবে $[x] + [y]$ এর মান)
- [a] 14 [b] 15 [c] 48 [d] none of these.
12. If $x^2 f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0$ ($x > 0$) then the value of $\int_{0.6}^{1.5} f(x)dx$ is (যদি $x^2 f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0$ ($x > 0$) হয়, তবে $\int_{0.6}^{1.5} f(x)dx$ এর মান)
- [a] -1 [b] 0 [c] 1 [d] none of these.
13. The value of $\frac{1}{\sin A \sin 2A} + \frac{1}{\sin 2A \sin 3A} + \frac{1}{\sin 3A \sin 4A} + \dots + \frac{1}{\sin nA \sin(n+1)A}$ is
- [a] $\cot A - \cot(n+1)A$ [b] $\operatorname{cosec} A (\cot A - \cot(n+1)A)$ [c] $\operatorname{cosec} A (\cot A + \cot(n+1)A)$ [d] $\cot(n+1)A - \cot A$.
14. Let x and y be real numbers such that $\sin x + \sin y = a$, $\cos x + \cos y = b$. Then the value of $\sin(x+y)$ is
(মনে কর x এবং y -এর বাস্তব মানের জন্য $\sin x + \sin y = a$, $\cos x + \cos y = b$. তাহলে $\sin(x+y)$ -এর মান)
- [a] $\frac{ab}{a^2 + b^2}$ [b] $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$ [c] $\frac{2ab}{a^2 + b^2}$ [d] $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.
15. If a and b are integers with $|a|, |b| \leq 5$ then the probability of $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$ being a perfect square is
(a, b দুটি পূর্ণসংখ্যা যেখানে $|a|, |b| \leq 5$. তাহলে $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$ পূর্ণবর্গ হবার সম্ভাবনা হল)
- [a] $\frac{19}{121}$ [b] $\frac{22}{121}$ [c] $\frac{30}{121}$ [d] none of these.
16. The circum-centre of the triangle whose sides are $\sqrt{31}$, $3\sqrt{2}$ and 7 units lies
(যে ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য $\sqrt{31}$, $3\sqrt{2}$ এবং 7 একক তার পরিকেন্দ্র)
- [a] outside the triangle [b] strictly within the triangle [c] on the triangle [d] equidistant from two sides of the triangle.
17. Which of the following four statements is not true ? (নীচের মন্তব্যগুলির মধ্যে কোনটি সত্য নয়?)
Two sets A and B are equal if and only if (দুটি সেট A এবং B সমান যদি এবং কেবলমাত্র যদি)
- [a] $A \triangle P = B \triangle P$, for some set P [b] $A \triangle P = B \triangle P$, for each set P [c] $(A \triangle B) \triangle C = (B \triangle C) \triangle A$, for each set C [d] $A \cap P = B \cap P$, for all infinite sets P .
18. The largest area of a rectangle which has one side along x -axis, one vertex on y axis and another vertex is on the curve $y = e^{-x}$ is
যে চতুর্ভুজের একটি বাহু x -অক্ষের উপর, একটি কৌণিক বিন্দু y -অক্ষের উপর এবং অন্য একটি কৌণিক বিন্দু $y = e^{-x}$ বক্ররেখার উপর, তার সর্বাধিক ক্ষেত্রফল হল
- [a] $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}$ [b] $\frac{1}{2} e^{-2}$ [c] $\sqrt{2} e^{-1}$ [d] e^{-1}
19. The curves having $\frac{d^2 y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^3 = 0$ as its differential equation are
যে বক্ররেখাসমূহের অবকল সমীকরণ $\frac{d^2 y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^3 = 0$ সেগুলি
- [a] ellipses উপবৃত্ত [b] hyperbolas পরাবৃত্ত [c] parabolas অধিবৃত্ত [d] circles বৃত্ত
20. The number of reflexive relations on a set containing n elements is
একটি n সংখ্যক পদ বিশিষ্ট সেটের উপর প্রতিবর্ত সম্পর্কের সংখ্যা
- [a] $2^n - 2^n$ [b] $2^{n^2 - n}$ [c] 2^{n^2} [d] 2^n

Group B

Each question carries 5 marks

প্রত্যেক প্রশ্নের জন্য 5 নম্বর

21. (a) A square matrix A is called *idempotent* if $A^2 = A$. If A is a 2×2 idempotent matrix and $(A - A^T)^2 = O$, then show that AA^T is idempotent. 3
 একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে আইডেমপোটেন্ট বলা হয়, যদি $A^2 = A$ হয়। যদি A একটি 2×2 আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স হয় এবং $(A - A^T)^2 = O$ হয়, তাহলে দেখাও যে AA^T একটি আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স।
- (b) For two square matrices A and B , show that $(BA)^2$ is idempotent if AB is so. 2
 দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A ও B -এর জন্য দেখাও যে $(BA)^2$ একটি আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স হবে, যদি AB -ও তাই হয়।
22. Let $f(x) = 2 \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$. Sketch the graphs of $y = |f(x)|$ and $y = [f(x)]$. Find $\int_0^\pi [f(x)] dx$. 3
 ধরা যাক, $f(x) = 2 \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ । $y = |f(x)|$ এবং $y = [f(x)]$ -এর খসড়া চিত্র অঙ্কন কর। $\int_0^\pi [f(x)] dx$ বের কর।
23. The sum of the length of the hypotenuse and another side of a variable right-angled triangle is constant. Show that the area of the triangle will be maximum or minimum when the angle between the hypotenuse and that side is $\frac{\pi}{3}$. Also verify whether the value is maximum or minimum. 3 + 2
 একটি পরিবর্তনশীল সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে অতিভুজ ও ঐ বাহুটির মধ্যকার কোণ $\frac{\pi}{3}$ হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন হবে। ক্ষেত্রফলটি সর্বাধিক নাকি সর্বনিম্ন — তা যাচাই কর। 3 + 2
24. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be such that $f(x^2) = (f(x))^2$ and $f(x+1) = f(x) + 1$, for each x . Prove f is an odd function; and $f(n) = n$ for any integer n . 3
 ধরা যাক $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ এমন যে প্রতিটি x -এর জন্য $f(x^2) = (f(x))^2$ এবং $f(x+1) = f(x) + 1$ । প্রমাণ কর f একটি অযুগ্ম অপেক্ষক এবং সমস্ত পূর্ণসংখ্যা n -এর জন্য $f(n) = n$ ।
25. Show that the coefficient of x^{99} in $(x-1)(x-a)(x-a^2)\dots(x-a^{99})$ where $a = 1 + \omega$, ω is an imaginary cube root of unity is $\pm\sqrt{3}i$. 3
 যদি $a = 1 + \omega$ হয়, তাহলে দেখাও যে $(x-1)(x-a)(x-a^2)\dots(x-a^{99})$ এর বিস্তৃতিতে x^{99} এর সহগ $\pm\sqrt{3}i$, যেখানে ω একের একটি কাম্পনিক ঘনমূল।
26. If $\int_1^2 e^{x^2} dx = a$ then find the value of $\int_e^{e^2} \sqrt{\ln x} dx$. যদি $\int_1^2 e^{x^2} dx = a$ হয় তাহলে $\int_e^{e^2} \sqrt{\ln x} dx$ এর মান নির্ণয় কর। 3
27. Three numbers are chosen at random from $1, 2, \dots, 2n$ with $n > 1$. Show that the probability that the numbers are in A.P. is $\frac{3}{4n-2}$. 3
 $1, 2, \dots, 2n$ সংখ্যাগুলি থেকে তিনটি সংখ্যা যথেষ্টভাবে নির্বাচিত করা হল, যেখানে $n > 1$ । দেখাও যে, সংখ্যাগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকার সম্ভাবনা হল $\frac{3}{4n-2}$ ।
28. Use the principle of mathematical induction to prove that any postage (in whole rupees) of amount more than Rs 17 can be done by using Rs 4 and Rs 7 stamps only. 3
 গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ কর 17 টাকার অধিক মূল্যের যেকোনো পোস্টেজ (পূর্ণ টাকায়) শুধুমাত্র 4 টাকা এবং 7 টাকার স্ট্যাম্প ব্যবহার করেই করা যেতে পারে।