

Group A

Each question below is followed by four possible answers of which exactly one is correct. Write [a] or [b] or [c] or [d] as your answer against the corresponding question number. Use only the first page of your answer book for this purpose. Each correct answer would be awarded 3 marks; 1 mark would be awarded for no attempt, and a wrong answer would fetch no credit.

প্রতিটি প্রশ্নের চারটি উত্তর দেওয়া আছে যার মধ্যে কেবলমাত্র একটি উত্তর সঠিক। প্রশ্নসংখ্যার পাশে [a] অথবা [b] অথবা [c] অথবা [d] সেই প্রশ্নের উত্তর হিসাবে লেখ। উত্তরপুস্তিকার কেবলমাত্র প্রথম পাতাটিই এই কাজে ব্যবহার কর। সঠিক উত্তরের জন্য 3 নম্বর, উত্তর না দেওয়ার জন্য 1 নম্বর, ভুল উত্তরের জন্য কোন নম্বর নেই।

1. The number of rational terms in the expansion of $(2^{\frac{1}{5}} + 3^{\frac{1}{10}})^{45}$ is
 $(2^{\frac{1}{5}} + 3^{\frac{1}{10}})^{45}$ -এর বিস্তৃতিতে মূলদ পদগুলির সংখ্যা

- [a] 4 [b] 10 [c] 5 [d] 11.

2. If $0 < \frac{b}{a} \leq 2$, then the sum of the infinite series $\frac{a-b}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{a}\right)^3 + \dots$ is equal to

যদি $0 < \frac{b}{a} \leq 2$ হয়, তবে $\frac{a-b}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{a}\right)^3 + \dots$ এই অসীম শ্রেণিটির যোগফল

- [a] $\log_e \frac{a}{b}$ [b] $\log_e \frac{b}{a}$ [c] $e^{\frac{a-b}{a}}$ [d] $\log_e (2 - \frac{b}{a})$.

3. If $x, a, b, c \in (0, \infty) - \{1\}$, and a, b, c are in G.P., then $\frac{1}{\log_x b} \left[\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x} \right]$ equals

যদি $x, a, b, c \in (0, \infty) - \{1\}$ এবং a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে তবে $\frac{1}{\log_x b} \left[\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x} \right]$ -এর মান

- [a] $\frac{1}{2}$ [b] 1 [c] 2 [d] 3.

4. In ΔABC , $A > B$; and both A & B satisfy the equation $4 \sin^3 x - 3 \sin x + k = 0$ for constant k , then C is
 ΔABC তে $A > B$ এবং A ও B কোনদুটি $4 \sin^3 x - 3 \sin x + k = 0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, যেখানে k ধ্রুবক, তবে C হল

- [a] $\frac{\pi}{3}$ [b] $\frac{\pi}{2}$ [c] $\frac{2\pi}{3}$ [d] $\frac{5\pi}{6}$.

5. If α, β are the roots of $x^2 - x - 1 = 0$ and $A_n = \alpha^n + \beta^n$, then the A.M. of A_{n-1} and A_n is
যদি $x^2 - x - 1 = 0$ -এর বীজদ্বয় α, β এবং $A_n = \alpha^n + \beta^n$ হয়, তবে A_{n-1} ও A_n -এর সমান্তরীয় মধ্যক হল

- [a] $2A_{n+1}$ [b] $\frac{1}{2}A_{n+1}$ [c] $2A_{n-2}$ [d] $\frac{1}{2}A_{n-2}$.

6. If the real variables x, y are constrained to satisfy $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$, then the minimum value of $x^2 + y^2$ is
বাস্তব চল x, y যদি $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$ এই শর্তটিকে সিদ্ধ করে, তবে $x^2 + y^2$ -এর অবনম মান

- [a] 2 [b] 1 [c] $\sqrt{3}$ [d] $\sqrt{2}$.

7. If $|z_1| = |z_2| = 1$ for complex z_1, z_2 , then $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ is equal to

যদি $|z_1| = |z_2| = 1$ হয়, যেখানে z_1, z_2 জটিল, তবে $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ -এর মান

- [a] 8 [b] 2 [c] 4 [d] 0.

8. For 2×2 matrices A, B, O (null matrix) given by $AB = O$, it follows that

প্রদত্ত 2×2 ম্যাট্রিক্স A, B, O (শূন্য ম্যাট্রিক্স) -এর জন্য $AB = O$ হলে,

- [a] $BA = O$ [b] $A^2 + B^2 = O$ [c] at least one of A & B is O [d] none of [a], [b], [c] is correct

9. P is a point on $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ and $PF_1 : PF_2 = 2 : 1$, where F_1 and F_2 are the two foci; then area $\Delta PF_1 F_2$ is
 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ -এর উপরে P একটি বিন্দু এবং $PF_1 : PF_2 = 2 : 1$, যেখানে নাভিভিন্দুদুটি হল F_1 এবং F_2 , এক্ষেত্রে $\Delta PF_1 F_2$ -এর ক্ষেত্রফল হল

- [a] 5 [b] 6 [c] 2 [d] 4.

10. For the function $2 \cos \frac{x-\pi}{3} \cos \frac{2x+\pi}{3}$, the period is
 $2 \cos \frac{x-\pi}{3} \cos \frac{2x+\pi}{3}$ অপেক্ষকটির পর্যায়

- [a] 2π [b] 4π [c] 6π [d] undefined.

11. The angle of intersection between the curves $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ and $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ is given by
 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ এবং $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ বক্রগুলির ছেদকোণ হল

- [a] $\tan^{-1} 1$ [b] $\tan^{-1} 2\sqrt{2}$ [c] $\tan^{-1} \frac{1}{2\sqrt{2}}$ [d] $\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

12. Let $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Then for fixed integral k , $1 \leq k \leq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$ equals
 $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ হলে নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যা k , $1 \leq k \leq n$ -এর জন্য, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$ -এর মান হল

- [a] a_k [b] b_k [c] πb_k [d] πa_k .

13. If $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.4$ and $P(A \cup B) \geq 0.75$, show that $0.2 \leq P(A \cap B) \leq 0.45$.

যদি $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.4$ এবং $P(A \cup B) \geq 0.75$ হয়, তবে দেখাও যে $0.2 \leq P(A \cap B) \leq 0.45$.

14. In a given $\triangle ABC$, $AB = AC$; and G is its centroid. If the position vectors of B, C and G are \vec{b}, \vec{c} and \vec{r} respectively (i) find the position vector of A and (ii) by vector method, show that $GP = GQ$, where the distinct points P and Q trisect BC .

প্রদত্ত $\triangle ABC$ তে, $AB = AC$; এবং G হল এর ভরকেন্দ্র। যদি B, C এবং G -এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে \vec{b}, \vec{c} এবং \vec{r} হয়, তবে (i) A -এর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর এবং (ii) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে $GP = GQ$, যেখানে P এবং Q স্বতন্ত্র বিন্দুগুলি BC কে ত্রিখণ্ডিত করে।

15. Let $F'(x) = \frac{e^{\sin x}}{x}$, $x > 0$. If $\int_1^4 \frac{2e^{\sin x^2}}{x} dx = F(k) - F(1)$, find the number k .

মনে কর $F'(x) = \frac{e^{\sin x}}{x}$, $x > 0$. যদি $\int_1^4 \frac{2e^{\sin x^2}}{x} dx = F(k) - F(1)$ হয়, তবে k সংখ্যাটির মান নির্ণয় কর।

16. Solve (সমাধান কর): $x \frac{dy}{dx} + y = x^2 y \sqrt{x^2 y^2 - 1}$.

17. A cubic polynomial $f(x)$ has -2 as a root; and it has a local maximum or minimum at the points -1 and $\frac{1}{3}$, and satisfies $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{14}{3}$, then find the polynomial $f(x)$.

একটি ত্রিঘাত বহুপদী $f(x)$ -এর -2 একটি বীজ; -1 ও $\frac{1}{3}$ বিন্দুতে এর স্থানীয় চরম অথবা অবম মান আছে; এবং $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{14}{3}$ হলে $f(x)$ বহুপদীটি নির্ণয় কর।

18. If $f(x+y) = f(x)f(y)$, for all real x, y ; then prove that $F(x) = \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}$ is an even function.

যদি সকল বাস্তব x, y -এর জন্য $f(x+y) = f(x)f(y)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $F(x) = \frac{f(x)}{1 + (f(x))^2}$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

19. Without expanding, show that the determinant $\begin{vmatrix} 4i & 8+i & 4+3i \\ -8+i & 16i & i \\ -4+3i & i & 8i \end{vmatrix}$ has purely imaginary value.

বিস্তৃত না করে, দেখাও যে $\begin{vmatrix} 4i & 8+i & 4+3i \\ -8+i & 16i & i \\ -4+3i & i & 8i \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান বিশুদ্ধ কাম্পনিক।

20. A particle is moving along a straight line, and at time t , its acceleration is $1 - t^2$. If it starts from rest, prove that when its velocity is maximum, the distance traversed is $\frac{5}{12}$ units.

সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি বস্তুকণার t সময়ে ত্বরণ $1 - t^2$. প্রমাণ কর যে, স্থিতাবস্থা থেকে শুরু করে কণাটির গতিবেগ সর্বাধিক হলে, কণাটি $\frac{5}{12}$ একক দূরত্ব অতিক্রম করেছে।

Group C

21. If for a function f defined on positive reals, $2f(x) = f(xy) + f(\frac{x}{y})$, $[x, y > 0]$; and if $f(1) = 0$, show that $f(x^n) = nf(x)$, for all positive integers n .

যদি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার উপর সংজ্ঞাত একটি অপেক্ষক f -এর জন্য $2f(x) = f(xy) + f(\frac{x}{y})$, $[x, y > 0]$; এবং $f(1) = 0$ হয়, তবে দেখাও যে সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n -এর জন্য $f(x^n) = nf(x)$.

22. Determine the real values of α for which the point (α, α^2) lies strictly within the triangle formed by the lines $2x + 3y - 1 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, and $5x - 6y - 1 = 0$.

α -এর বাস্তব মানগুলি নির্ণয় কর, যার জন্য (α, α^2) বিন্দুটি $2x + 3y - 1 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, এবং $5x - 6y - 1 = 0$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ত্রিভুজটির পুরোপুরি ভিতরে অবস্থিত।

23. Let $S = \{1, 2, \dots, n\}$, n being a positive integer. Find the probability that a randomly selected ordered pair (A, B) of subsets of S would satisfy $A \subsetneq B$.

মনে কর $S = \{1, 2, \dots, n\}$, যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। যদৃচ্ছভাবে নির্বাচিত S -এর উপসেটের একটি ক্রমিক জোড় (A, B) -এর $A \subsetneq B$ শর্তটি সিদ্ধ করার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

24. Sketch on plain paper the curve given by $4y = |4 - x^2|$; and find the area enclosed by the curve and the x -axis.

সাদা কাগজে $4y = |4 - x^2|$ এই বক্রটির রেখচিত্র অঙ্কন কর; এবং বক্রটি ও x -অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।